

Ana Luiza dos Santos

Instituto Federal do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS) – Passos, Minas Gerais
ana14.santos@alunos.ifsuldeminas.edu.br

Luiz Augusto Ferreira dos Reis

Instituto Federal do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS) – Passos, Minas Gerais
luiz3.reis@alunos.ifsuldeminas.edu.br

Fredy Coelho Rodrigues

Instituto Federal do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS) – Passos, Minas Gerais
fredy.rodrigues@ifsuldeminas.edu.br
<https://orcid.org/0000-0001-8307-9305>

A CONSTRUÇÃO DE ARGUMENTOS DE PROVA NA VALIDAÇÃO DE PROPOSIÇÕES NUMÉRICAS: um estudo exploratório com discentes concluintes de um curso de formação de professores em matemática

RESUMO

O presente estudo analisa os tipos e níveis de prova mobilizados por discentes concluintes do curso de Licenciatura em Matemática na validação de proposições numéricas. Fundamentada no modelo teórico-metodológico de Rodrigues e Monteiro, que articula a estrutura argumentativa de Toulmin à teoria dos tipos e níveis de prova de Balacheff, a pesquisa assume abordagem qualitativa e caráter exploratório. Os dados foram obtidos por meio da aplicação de um questionário contendo quatro proposições matemáticas a sete estudantes formandos. Os resultados evidenciam a predominância de provas pragmáticas, especialmente em níveis elementares de validação, bem como dificuldades na elaboração de argumentos de caráter probatório e generalizador. Conclui-se que tais fragilidades apontam para a necessidade de maior ênfase no trabalho com a prova matemática na formação inicial de professores.

Palavras-chave: Educação matemática; Níveis de prova matemática; Argumento de prova; Formação de professores; Licenciatura em matemática.

THE CONSTRUCTION OF PROOF ARGUMENTS IN THE VALIDATION OF NUMERICAL PROPOSITIONS: an exploratory study with graduating students of a mathematics teacher training course

ABSTRACT

This study analyzes the types and levels of proof mobilized by graduating students in a Mathematics Teacher Education program when validating numerical propositions. Grounded in the theoretical–methodological model proposed by Rodrigues and Monteiro, which articulates Toulmin’s argumentative structure with Balacheff’s theory of proof types and levels, the research adopts a qualitative and exploratory approach. Data were collected through the administration of a questionnaire containing four mathematical propositions to seven graduating students. The results reveal a predominance of pragmatic proofs, especially at elementary levels of validation, as well as difficulties in constructing arguments of a probative

and generalizing nature. It is concluded that these weaknesses point to the need for greater emphasis on mathematical proof in initial teacher education.

Keywords: *Mathematics education; Levels of mathematical proof; Mathematical argumentation; Teacher education; Bachelor's degree in mathematics*

1 INTRODUÇÃO

No campo da Educação Matemática, o termo “prova” pode assumir diferentes significados. Em contextos escolares, é frequentemente associado a instrumentos de avaliação utilizados para verificar o desempenho dos estudantes. Neste trabalho, entretanto, o termo “prova” refere-se ao argumento matemático elaborado com o objetivo de justificar a validade de uma proposição, constituindo-se como um processo de validação que busca estabelecer, por meio de razões, por que determinada afirmação é verdadeira. Nessa perspectiva, as provas matemáticas configuram-se como elemento central na construção e validação do conhecimento matemático, desempenhando também papel relevante no desenvolvimento da compreensão conceitual, do raciocínio lógico e da formação crítica dos estudantes (Rodrigues e Monteiro, 2025).

Para além da função de validação de um enunciado, a prova assume, no contexto educacional, a função de explicar, justificar e promover a compreensão dos conceitos matemáticos. Apesar de sua relevância, a produção de provas e demonstrações tem se configurado como uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao longo de sua formação matemática, especialmente no ensino superior, em particular nos cursos de Licenciatura em Matemática (Rodrigues, 2023).

Pesquisas em Educação Matemática indicam que os estudantes mobilizam diferentes formas de argumentação ao tentar justificar afirmações matemáticas, recorrendo desde exemplos particulares e argumentos empíricos até tentativas de formalização mais elaboradas (Balacheff, 1987, 1988; Rodrigues, 2023). Essas produções evidenciam que a aprendizagem da prova não ocorre de maneira linear, mas envolve a transição entre distintos tipos e níveis de prova. Nesse sentido, Hanna (2000) propõe uma distinção significativa entre a prova que apenas valida a veracidade de um resultado e a prova explicativa, aquela que favorece a compreensão matemática. De modo semelhante, Balacheff (1987, 1988) destaca que os estudantes mobilizam diferentes tipos e níveis de prova, empíricos, pragmáticos, conceituais e formais, fortemente influenciados pelo contexto de ensino em que estão inseridos, ainda que tais níveis nem sempre sejam considerados nos processos avaliativos, que frequentemente privilegiam apenas o rigor formal da demonstração.

No âmbito da formação inicial de professores, investigar os tipos de provas que os licenciandos em Matemática são capazes de produzir torna-se particularmente relevante, uma vez que esses estudantes, além de aprenderem conteúdos matemáticos, constroem concepções sobre o que significa provar e demonstrar em Matemática. Tais concepções tendem a influenciar diretamente suas futuras práticas pedagógicas, especialmente no modo como irão propor, avaliar e mediar atividades envolvendo provas e demonstrações em sala de aula. Assim, compreender como os licenciandos argumentam matematicamente implica também refletir sobre o modo como esses futuros docentes poderão mediar a construção de argumentos de prova no contexto escolar.

Essas questões tornam-se ainda mais evidentes em disciplinas de caráter teórico, como a Análise Real, frequentemente reconhecida como um dos componentes curriculares mais complexos da Licenciatura em Matemática. A exigência de rigor lógico, o uso sistemático de definições formais e quantificadores, a construção de contraexemplos e a elaboração de demonstrações abstratas revelam fragilidades na formação argumentativa dos estudantes, que muitas vezes recorrem a intuições ou exemplos particulares como substitutos da prova formal (Balacheff, 1988; Hanna, 1990).

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo analisar os argumentos de prova produzidos por discentes do oitavo período do curso de Licenciatura em Matemática, a partir de atividades desenvolvidas no âmbito da disciplina de Análise Real, buscando identificar os tipos e níveis de prova mobilizados pelos licenciandos em suas produções escritas. Fundamentado nas contribuições de Balacheff (1987, 1988) acerca dos tipos e níveis de prova e no modelo argumentativo de Toulmin (2001), o estudo busca identificar e problematizar as dificuldades manifestadas nas produções registradas dos licenciandos, contribuindo para uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da prova matemática no ensino superior e para a formação de futuros docentes mais sensíveis aos processos argumentativos dos estudantes.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A busca pela verdade constitui um elemento central da prática científica. No caso da matemática, essa verdade assume papel fundamental na atuação do matemático (Domingues, 2002). Diferentemente das ciências empíricas, como Física, Química e Biologia, nas quais o conhecimento se fundamenta em observações e experimentos, a matemática baseia-se no método axiomático-dedutivo. Nesse contexto, uma proposição é considerada verdadeira quando validada por meio de uma demonstração, isto é, por um argumento lógico

estruturado que estabelece generalizações sobre o objeto de estudo a partir de raciocínios dedutivos (Rodrigues, 2023). Assim, um traço distintivo da matemática em relação a outras áreas do conhecimento reside no fato de que a legitimidade das proposições matemáticas repousa sobre a prova formal, entendida como demonstração rigorosa da validade de um enunciado (Bicudo, 2002).

2.1 A prova no campo da matemática e no campo da Educação Matemática

No campo da matemática profissional, a demonstração constitui o padrão de validação reconhecido pela comunidade científica. Para ser aceita, a prova deve apresentar organização lógica rigorosa, obedecendo a regras de dedução e frequentemente utilizando notação formal e linguagem simbólica (Hanna, 1990; Hanna e De Villiers 2008). Nesse sentido, a demonstração pode ser compreendida como uma forma específica de argumentação (prova formal) voltada à validação de proposições matemáticas (Garnica, 2002).

No campo da Educação Matemática, entretanto, busca-se ampliar essa compreensão, valorizando diferentes formas de argumentação produzidas em sala de aula. Nessa perspectiva, destaca-se a noção de etnoargumentação (Garnica, 2002), que reconhece a relevância de argumentos informais na construção do conhecimento matemático. Assim, em contextos educacionais, a validação de resultados não se restringe necessariamente à demonstração formal, podendo envolver justificativas baseadas em raciocínios heurísticos, exemplos ou argumentações informais (Rodrigues, 2023).

A centralidade da prova no ensino da matemática tem sido amplamente discutida na literatura. Para Hanna (1990), o valor de uma prova não está apenas em confirmar a veracidade de um resultado, mas também em revelar relações fundamentais e promover compreensão matemática. Nesse sentido, a autora distingue entre a prova que apenas valida um teorema e a prova explicativa, que permite compreender por que determinado resultado é verdadeiro. No contexto educacional, essa distinção é particularmente relevante, pois muitos estudantes conseguem validar empiricamente uma proposição sem compreender os fundamentos conceituais que a sustentam.

Desse modo, o ensino da prova não deve se restringir ao rigor formal das demonstrações. Hanna (2000) argumenta que, em sala de aula, a prova deve assumir também função explicativa, contribuindo para a construção de significados matemáticos. Nessa perspectiva, tanto o raciocínio quanto a justificação devem ser valorizados por meio de

diferentes formas de argumentação, incluindo raciocínios indutivos, exemplos genéricos e explicações baseadas em propriedades matemáticas.

Esses diferentes modos de justificar proposições podem ser classificados como argumentos probatórios ou não probatórios. Os primeiros incluem provas contendo exemplos e justificações genéricas ou demonstrações fundamentadas em axiomas, teoremas e definições; já os não probatórios correspondem a argumentos empíricos e raciocínios que sustentam ou refutam uma alegação matemática sem garantir sua validade universal (Triantafyllou, Spiliotopoulou e Potari, 2016). Assim, neste estudo, adota-se a concepção de prova presente na Educação Matemática, compreendida de forma ampla e associada a diferentes formas de argumentação produzidas pelos estudantes.

2.2 Tipos e níveis de prova em Educação Matemática

Balacheff (1987, 1988) propõe uma categorização para os diferentes tipos de prova produzidos por estudantes em contextos de aprendizagem matemática. Seu modelo distingue duas categorias principais: provas pragmáticas e provas intelectuais.

As provas pragmáticas baseiam-se em ações concretas sobre o objeto de estudo, envolvendo observações, testes ou verificações empíricas. Nesse tipo de prova, a validação de uma proposição ocorre a partir de exemplos particulares ou experiências realizadas pelo estudante, o que pode conduzir a generalizações inadequadas (Balacheff, 1987, 1988; Rodrigues e Monteiro, 2024).

As provas intelectuais, por sua vez, fundamentam-se na compreensão das propriedades matemáticas e nas relações estabelecidas por meio do raciocínio lógico. Nesse caso, a argumentação é construída a partir de explicações conceituais e de processos dedutivos que permitem estabelecer generalizações (Balacheff, 1987, 1988).

A transição entre essas duas formas de prova envolve diferentes níveis de validação. Balacheff (1987, 1988) identifica quatro níveis principais: empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico e experiência mental.

Empirismo ingênuo: corresponde ao nível mais elementar da prova pragmática, no qual a validação de uma proposição ocorre por meio de ações, observações, testes ou verificações aplicadas a casos particulares, geralmente sem critérios previamente definidos. Nesse contexto, o raciocínio indutivo leva o estudante a realizar generalizações inadequadas, uma vez que a simples verificação empírica não garante a validade universal da proposição. Ainda assim, esse tipo de prova representa um passo inicial importante para o desenvolvimento da capacidade de generalização (Balacheff, 1987, 1988; Rodrigues e Monteiro, 2021, 2024).

Experimento crucial: corresponde ao segundo nível da prova pragmática e caracteriza-se pela validação de uma proposição a partir de um caso considerado pelo estudante como mais complexo ou representativo. A partir dessa verificação, o discente conclui que a proposição é verdadeira para todos os casos, sustentando a ideia de que “se funciona aqui, funcionará sempre” (Balacheff, 1988). No entanto, esse procedimento conduz frequentemente a generalizações equivocadas, pois o exemplo utilizado pode representar apenas um caso particular (Balacheff, 1987, 1988; Rodrigues e Monteiro, 2021, 2024).

Nos dois primeiros níveis de prova, a linguagem utilizada pelos estudantes apresenta caráter informal e pouco estruturado, sendo frequentemente expressa por meio de cálculos, ilustrações ou gráficos baseados em verificações experimentais. Essas justificativas empíricas não têm como objetivo estabelecer a veracidade de uma proposição em sentido rigoroso, mas validar a afirmação a partir de experiências imediatas. Por essa razão, esses níveis são classificados como provas pragmáticas, pois são considerados válidos pelos próprios estudantes que os elaboram (Balacheff, 1988).

Exemplo genérico: representa um nível intermediário entre a prova pragmática e a prova intelectual (Balacheff, 1988). Nesse tipo de prova, a validação baseia-se em um exemplo particular tomado como representante de uma classe mais ampla. As operações realizadas sobre esse exemplo evidenciam propriedades que sustentam a conjectura e indicam sua possível generalização. Quando o raciocínio permanece restrito ao caso específico, o exemplo genérico ainda se aproxima das provas pragmáticas; entretanto, quando permite explicitar razões que sustentam a generalização, passa a integrar a categoria das provas intelectuais (Balacheff, 1987, 1988; Rodrigues e Monteiro, 2021, 2024). Uma dificuldade recorrente nesse nível reside na necessidade de que os interlocutores reconheçam o exemplo utilizado como suficientemente representativo; caso contrário, a explicação pode ser interpretada apenas como um caso particular (Balacheff, 1988).

Experiência mental: inserida na categoria das provas intelectuais, representa um dos níveis mais avançados de validação matemática (Balacheff, 1988). Nesse estágio, as justificativas deixam de depender de representações concretas e passam a ser construídas por meio de raciocínios abstratos e generalizações conceituais. Esse tipo de prova caracteriza-se pela maior organização do discurso e pelo encadeamento lógico dos argumentos (Rodrigues e Monteiro, 2021). Nessa perspectiva, o estudante pode mobilizar tanto a linguagem natural (prova informal) quanto linguagem simbólica (prova formal) para estruturar deduções lógicas, evidenciando um avanço significativo na forma de expressar o pensamento matemático (Balacheff, 1987). A demonstração matemática (prova formal)

constitui um caso particular de experiência mental, caracterizado pela formalização da linguagem e pelo uso sistemático de definições, teoremas e regras de inferência, cuja validade é socialmente reconhecida pela comunidade matemática. Essa demonstração pode assumir diferentes formas, como prova direta, por indução ou por contradição (Rodrigues e Monteiro, 2024).

O quadro 1, apresentado a seguir sintetiza as ideias de Balacheff e o caráter de probatório das provas conforme propõe por Hanna (2000); Rodrigues (2023) e Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari (2016).

Quadro 1 - Tipos e níveis de prova e o caráter probatório das provas

Tipo de prova	Nível de prova	Subnível de prova	Caráter probatório
Prova pragmática (prova empírica)	Empirismo ingênuo	-	Não
	Experimento crucial	-	Não
Prova pragmática/ prova intelectual	Exemplo genérico	-	Não/Sim
Prova intelectual (prova conceitual)	Experiência mental	Prova informal	Sim
		Prova formal (demonstração)	Sim

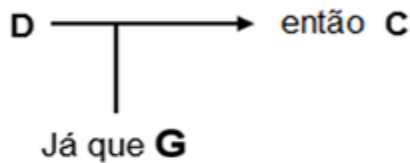
Fonte: os autores

2.3 A estrutura do argumento de prova

O modelo de argumentação proposto por Stephen Toulmin (2001), conhecido como Toulmin’s Argument Pattern (TAP), constitui uma referência relevante para a análise da estrutura de argumentos produzidos em contextos educacionais. Esse modelo permite examinar tanto a construção quanto a consistência lógica dos argumentos, identificando os elementos que os compõem e as relações estabelecidas entre eles.

De acordo com Toulmin (2001), a estrutura básica de um argumento envolve três componentes fundamentais: dados, garantia e conclusão. Os dados correspondem às informações ou evidências utilizadas para sustentar uma afirmação; a conclusão representa a proposição que se pretende estabelecer; e a garantia corresponde à justificativa que conecta os dados à conclusão, explicando por que as evidências apresentadas sustentam a alegação.

Figura 1 - Estrutura básica do argumento



Fonte: Toulmin (2001)

Estudos recentes sobre argumentação e prova no campo da Educação Matemática têm mobilizado o modelo de Toulmin, bem como as contribuições de Balacheff (1987; 1988) e Hanna (1990; 2000), para analisar processos de produção e validação de argumentos no ensino da Matemática. Nessa perspectiva, Rodrigues *et al.* (2021) investigaram os argumentos produzidos por licenciandos em Matemática ao justificarem conceitos de função em uma aula investigativa mediada pelo software GeoGebra. A estrutura dos argumentos foi analisada com base no modelo de Toulmin, enquanto sua qualidade foi avaliada segundo os critérios de Erduran, Simon e Osborne (2004). A análise dos relatórios de investigação elaborados pelos estudantes, complementada por videogravações das aulas, revelou que grande parte dos argumentos apresentados se apoiava predominantemente em evidências experimentais, com pouca fundamentação em conceitos, teoremas ou generalizações matemáticas.

Ampliando essa linha de investigação, Rodrigues e Monteiro (2021; 2024) articularam o modelo de Toulmin à teoria dos tipos e níveis de prova proposta por Balacheff (1987; 1988), com o objetivo de avaliar a qualidade dos argumentos de prova produzidos em contextos de ensino pautados na argumentação coletiva. Esses estudos foram desenvolvidos em atividades de modelagem matemática (Rodrigues e Monteiro, 2021) e de investigação matemática (Rodrigues e Monteiro, 2024), demonstrando que o modelo proposto constitui uma ferramenta eficaz para analisar o tipo, o nível e a solidez das provas elaboradas pelos estudantes, além de apresentar potencial como recurso pedagógico para professores de Matemática.

Mais recentemente, no livro *Argumentações e provas na formação de professores em matemática*, Rodrigues e Monteiro (2025) discutem o papel pedagógico da prova no ensino da Matemática e apontam possibilidades de ampliação do modelo de avaliação do argumento de prova por eles proposto. Entre essas possibilidades, destacam-se investigações voltadas para contextos em que a prova é produzida de forma monológica ou individual, especialmente em situações de resolução de problemas. É nesse contexto que se insere o presente estudo, que busca avançar na literatura ao investigar a aplicação desse modelo na análise de argumentações individuais, focalizando a avaliação do tipo, do nível e da solidez de provas elaboradas por estudantes para validar problemas numéricos.

O modelo utilizado nesta pesquisa será apresentado na seção de metodologia, na qual também se descrevem os procedimentos adotados para a análise dos dados.

3 METODOLOGIA

O estudo desenvolvido por Rodrigues e Monteiro (2021) apresentou um modelo teórico-metodológico para avaliar a qualidade dos argumentos de prova em um contexto de ensino voltado para a modelagem matemática, fundamentado na teoria dos tipos e níveis de prova proposta por Balacheff (1987; 1988). Posteriormente, Rodrigues e Monteiro (2024) ampliaram e aperfeiçoaram esse modelo, aplicando-o em situações de ensino relacionadas à investigação matemática.

Em ambos os estudos, o modelo foi explorado em contextos de argumentação coletiva e colaborativa. No presente estudo, pretende-se explorar a versão mais recente do modelo (Rodrigues e Monteiro, 2024) para examinar a produção de argumentos de prova como resultado de uma ação individual e monológica de estudantes concluintes do curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS – Campus Passos, no ano de 2025.

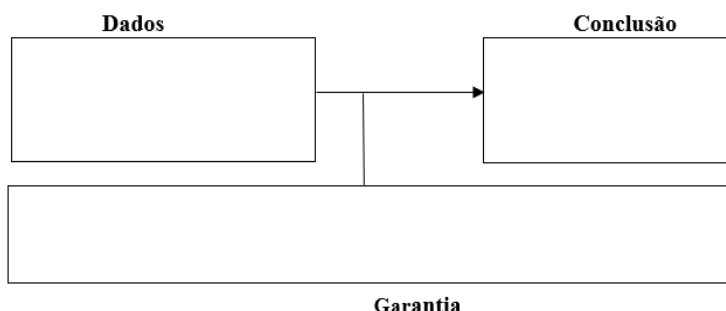
Assim, este estudo, de natureza qualitativa e caráter exploratório, tem por objetivo investigar os tipos e níveis de prova em que se inserem os argumentos produzidos por sete discentes formandos, bem como compreender as dificuldades enfrentadas na elaboração de provas em problemas de validação de proposições numéricas. A partir desse objetivo, formula-se a seguinte questão de pesquisa: quais são os tipos e níveis de prova em que se inserem os argumentos produzidos por estudantes formandos de um curso de Licenciatura em Matemática em problemas de validação de proposições numéricas, e quais dificuldades enfrentam na elaboração dessas provas?

A coleta de dados foi realizada por meio de um questionário contendo quatro proposições matemáticas, elaboradas com o intuito de que os discentes produzissem argumentos de prova para validar cada uma delas: (1) a soma de dois números ímpares corresponde a um número par; (2) o produto envolvendo um número positivo por um número negativo resulta em um número negativo; (3) todo número real não nulo elevado a zero é igual a um; e (4) a soma dos primeiros n inteiros positivos $S(n)$ é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

O tempo destinado para a resolução do questionário foi de duas horas-aula. Os sete estudantes participantes manifestaram consentimento em participar da pesquisa, aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) e registrada sob o protocolo CAAE: 78634723.1.3001.8158 (CEP IFSULDEMINAS).

Para a organização dos dados, adotou-se o modelo argumentativo de Toulmin (2001), adaptado (Figura 2), para identificar e separar os componentes presentes nos argumentos de validação produzidos pelos estudantes, sejam eles formais ou informais.

Figura 2 - Estrutura simples do modelo de Toulmin

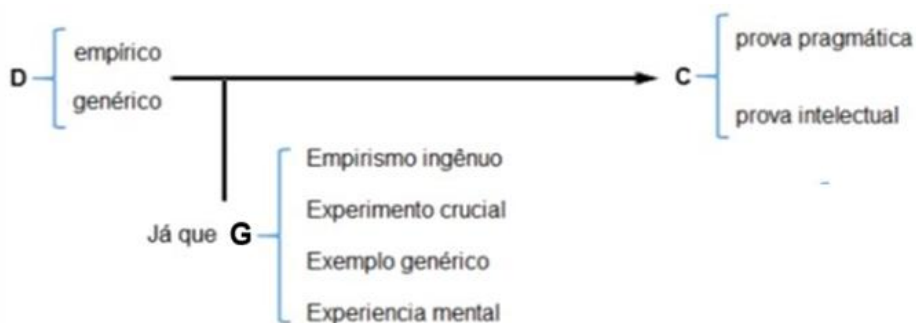


Fonte: Adaptado de Toulmin (2001)

No caso dos argumentos formais, as hipóteses foram indicadas no campo dados, a tese no campo conclusão e a demonstração no campo garantia.

Na etapa seguinte, os argumentos foram examinados à luz do modelo teórico-metodológico de Rodrigues e Monteiro (2024), que classifica os componentes do argumento de Toulmin (2001) a partir da teoria de Balacheff (1987; 1988) sobre os tipos e níveis de prova em Educação Matemática. Neste estudo, utilizam-se especificamente as subclassificações e descrições referentes aos componentes dados (D), garantia (G) e conclusão (C).

Figura 3 - TAP no contexto da teoria de Balacheff (1987, 1988)



Fonte: adaptado de Rodrigues e Monteiro (2024)

Os dados (D) podem ser classificados como empíricos ou genéricos. Um dado é considerado empírico quando resulta de observações, manipulações ou testes realizados sobre um objeto ou fenômeno em estudo. Já o dado é classificado como genérico quando se refere a uma ideia geral sobre o fenômeno analisado, frequentemente expressa por meio de símbolos ou variáveis que indicam um processo de generalização (Rodrigues e Monteiro, 2021; 2024; Rodrigues, 2023).

A garantia (G), por sua vez, está relacionada à forma como o estudante elabora uma conjectura ou resultado e realiza sua validação. Para Balacheff (1987), esse “modo” refere-se às estratégias e raciocínios mobilizados pelos estudantes na construção da justificativa.

Nesse sentido, a garantia pode ser enquadrada em categorias como empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico ou experiência mental (Rodrigues e Monteiro, 2021; 2024; Rodrigues, 2023).

A conclusão (C) pode assumir caráter pragmático ou intelectual, dependendo da classificação atribuída à garantia (Rodrigues e Monteiro, 2021; 2024; Rodrigues, 2023). Como destacam Rodrigues e Monteiro (2021, p. 148), “o argumento será classificado como prova intelectual se a conclusão for um elemento de prova generalizador”, enquanto justificativas fundamentadas apenas em exemplos particulares tendem a ser caracterizadas como provas pragmáticas.

Nesse cruzamento analítico, a teoria de Balacheff fornece os critérios para classificar o tipo e o nível de prova, enquanto o modelo de Toulmin oferece a estrutura para identificar os componentes do argumento e examinar as relações entre eles.

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2024), a qualidade do argumento de prova pode ser avaliada a partir da natureza da conclusão apresentada. O argumento será considerado forte e bem elaborado quando a conclusão for classificada como prova intelectual ou quando se tratar de uma prova pragmática do tipo experimento crucial a serviço da refutação de um argumento. Por outro lado, o argumento será considerado fraco e de pouca elaboração quando a conclusão estiver baseada em uma prova pragmática de caráter não refutador (Rodrigues e Monteiro, 2024).

O modelo proposto por Rodrigues e Monteiro (2024), portanto, articula as contribuições de Toulmin e Balacheff em uma estrutura analítica capaz de avaliar a solidez e a qualidade do argumento de prova. Enquanto Balacheff permite compreender a progressão dos níveis de prova, o modelo de Toulmin fornece a estrutura para examinar a consistência do raciocínio. Juntas, essas perspectivas constituem a base do modelo utilizado na análise dos dados desta pesquisa.

Durante a análise dos argumentos produzidos pelos estudantes, as dificuldades apresentadas pelos sujeitos da pesquisa serão identificadas com base no tipo e no nível de prova que forem capazes de elaborar.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção é apresentado a análise dos argumentos de prova produzidos por 7 acadêmicos concluintes do curso de Licenciatura do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante a validação de 4 proposições numéricas.

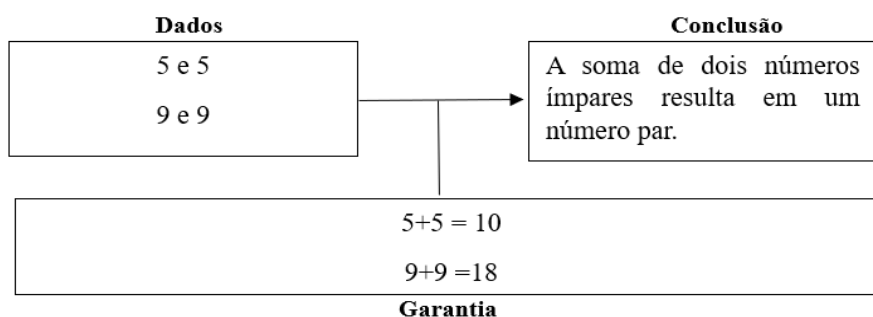
De modo a garantir a confidencialidade dos dados e preservar o anonimato dos sujeitos de pesquisa, os participantes foram identificados por nomes fictícios: Maria, Vitor, Winderson, Luiza, Gustavo, Vinícius e Lourdes. Estes estudantes estavam matriculados no 8º período do curso de Licenciatura em Matemática no segundo semestre de 2025, já em fase de conclusão do curso.

Os dados foram extraídos de um questionário de pesquisa contendo 4 problemas numéricos de prova e aplicados a cada um dos participantes do estudo.

Inicialmente, foi solicitado aos sujeitos de pesquisa que encontrassem um argumento de prova para validar a seguinte afirmação (tese) “a soma de dois números ímpares corresponde a um número par”.

Como resultado desta tarefa, foram identificadas 4 estratégias ou modos variados de validação (Balacheff, 1987; 1988) para a afirmação proposta. Os dados coletados são apresentados a partir da estrutura simples do modelo argumentativo proposto por Toulmin (2001) e analisados sob a luz a teoria de Balacheff sobre os tipos e níveis de prova em Educação Matemática a partir do modelo teórico metodológico proposto por Rodrigues e Monteiro (2024).

Figura 3 - Modo de validação proposto por Vitor para a proposição 1

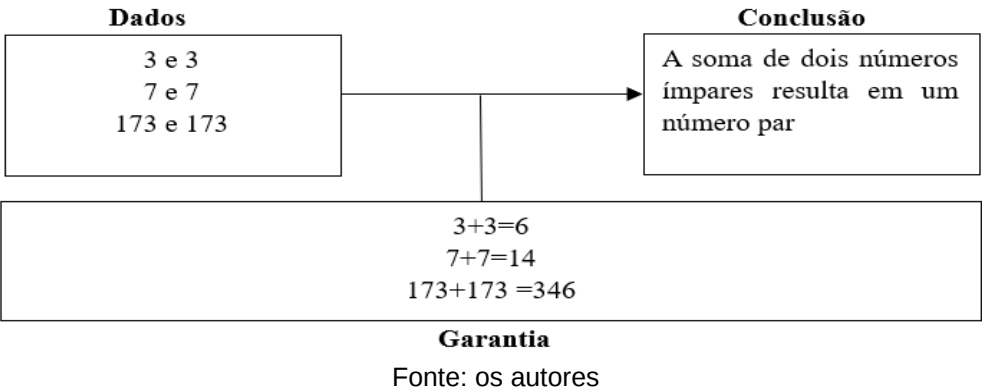


Fonte: os autores

A estratégia utilizada por Vitor parte de dados empíricos (Rodrigues e Monteiro, 2024) e por meio de uma garantia classificada como empirismo ingênuo (Rodrigues e Monteiro, 2024) estabelece uma conclusão geral. Por meio do tipo de garantia apresentada pelo discente conclui-se que o tipo de prova produzida por ele é a prova pragmática (Balacheff, 1987;1988) uma vez que a justificativa vem de exemplos específicos e particulares, e não de uma regra geral (Rodrigues e Monteiro, 2024). O argumento de prova apresentado pelo estudante, nos permite classifica-lo em um nível de prova denominado “Empirismo ingênuo” (Balacheff, 1987; 1988) e descrito pelo autor como o nível mais elementar da prova pragmática, onde a validação de uma proposição se dá por meio do teste da proposição para

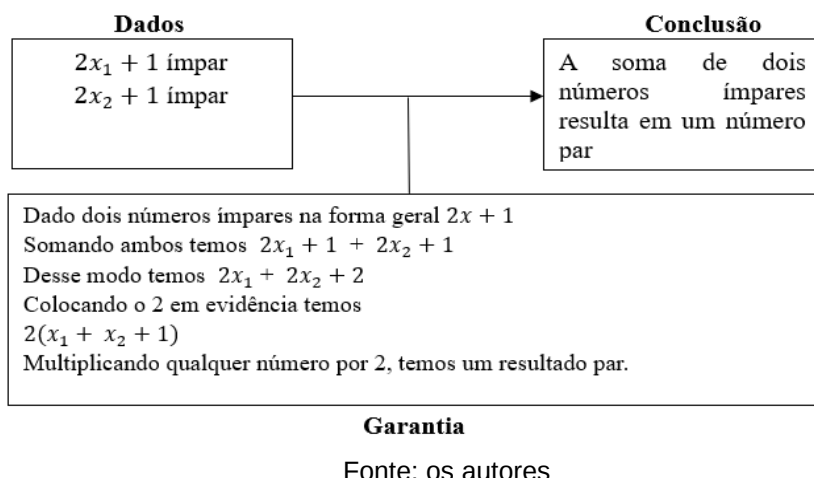
alguns casos particulares, geralmente sem critérios definidos. Neste nível de prova o raciocínio indutivo conduz o discente a uma generalização imprópria, levando em consideração que a verificação empírica não garante a validade da proposição. O argumento de prova, portanto, apresentado pelo estudante é fraco e de pouca elaboração (Rodrigues e Monteiro, 2024), além disso não tem caráter probatório (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari, 2016).

Figura 5 - Modo de validação proposto por Winderson para a proposição 1



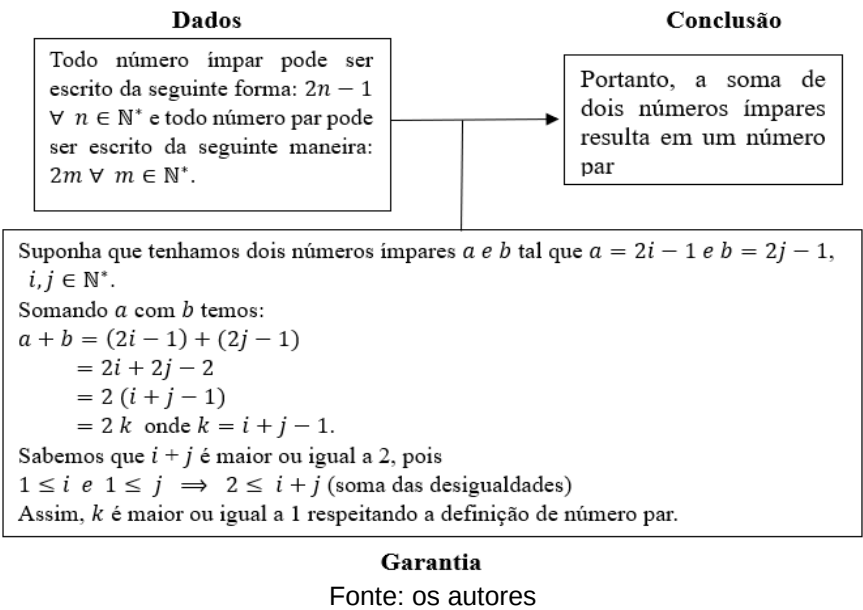
A estratégia utilizada por Winderson também parte de dados empíricos (Rodrigues e Monteiro, 2024) e por meio de uma garantia agora classificada como experimento crucial (Rodrigues e Monteiro, 2024) estabelece uma conclusão geral. Diferentemente de Vitor, Winderson utilizou em sua garantia um teste empírico não tão particular como aqueles exemplos apresentados por Vitor. Em sua justificativa (garantia) Winderson foi um pouco além e escolheu para teste o número 174, sendo este um exemplo mais complexo, corroborando para a crença de que se funciona para um número grande funcionará para os demais (Balacheff, 1987;1988). Este exemplo adicional e atípico comparado aos anteriores, nos permite classificar o nível de prova do discente como “experimento crucial” (Balacheff, 1987;1988) sendo este o segundo nível da prova pragmática e que se caracteriza-se pela validação de uma proposição em um caso considerado mais complexo ou especial pelo estudante. Este argumento de prova, de natureza pragmática (Balacheff, 1987;1988) é considerado, portanto, fraco e de pouca elaboração (Rodrigues e Monteiro, 2024) e não tem poder de validação (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari, 2016).

Figura 6 - Modo de validação proposto por Gustavo para a proposição 1



A argumentação apresentada por Gustavo parte de dados genéricos (Rodrigues e Monteiro, 2024) desprovidos, no entanto, da condição explícita que define um número ímpar. Por meio de uma garantia classificada como experiência mental (Rodrigues e Monteiro, 2024) ele constrói, ainda que sem rigor, uma prova intelectual (Balacheff, 1987;1988). A classificação da garantia apresentada está relacionada ao nível de prova alcançado pelo discente, ou seja, a experiência mental (Balacheff, 1987; 1988). Este nível de prova é considerado por Balacheff como um dos níveis mais elevados da hierarquia de prova uma vez que a estratégia utilizada na argumentação não se apoia em concretizações ou em representantes particulares, mas sim em um processo de generalização racional (Balacheff, 1987; 1988). O modo de validação caracteriza-se por operações e deduções lógicas, por meio dos quais o estudante generaliza a situação e conclui que a soma de dois números ímpares resulta em um número par. Comparado às provas apresentadas anteriormente por Vitor e Winderson a garantia apresentada por Gustavo sugere uma ação cognitiva mais complexa na medida em que ele opta pelo uso da linguagem matemática simples para desencadear um raciocínio mais genérico (Rodrigues e Monteiro, 2021; Hanna, 1990). A prova é considerada forte e de boa elaboração (Rodrigues e Monteiro, 2024), contudo ainda requer maior rigor formal na descrição dos dados, ou seja, especificar que tipo de números correspondem x_1 e x_2 na definição de números ímpares. Ainda assim, isso não comprometeu seu caráter probatório (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafyllou, Spiliotopoulou e Potari, 2016). Trata-se, portanto, de um argumento de prova intelectual (Balacheff, 1987;1988), baseado em generalizações racionais (Hanna, 2000) em um nível de experiência mental não tão formal (Balacheff, 1987;1988).

Figura 7 - Modo de validação proposto por Luiza para a proposição 1



A estratégia adotada por Luiza parte de dados genéricos (Rodrigues e Monteiro, 2024) descritos de maneira formal e que restringe a condição de números pares e ímpares apenas para números inteiros positivos. A demonstração apresentada na garantia pode ser classificada como uma experiência mental (Rodrigues e Monteiro, 2024) em um nível mais formal comparado à garantia apresentada por Gustavo. Os argumentos apresentados na garantia, explicitam um encadeamento lógico dedutivo que de maneira racional controla toda a generalidade da situação (Hanna, 1990; Balacheff, 1987;1988). A argumentação apresentada na garantia revela uma evolução na forma de comunicação, caracterizada pelo cuidado na formalização dos conceitos, uso símbolos e sentenças matemáticas para expressar deduções e generalizações, típico de uma demonstração matemática e formal (Balacheff, 1987;1988). Este tipo de garantia, portanto, nos permite classificar este tipo de prova como uma prova intelectual (Balacheff, 1987;1988) de caráter probatório (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari, 2016). Para Rodrigues e Monteiro (2024) a prova produzida é forte e de boa elaboração, alcançando assim o nível mais elevado da hierarquia proposto por Balacheff (1987; 1988). A demonstração apresentada por Luiza, portanto, limitou o escopo da prova aos números pares e ímpares restrito ao conjunto dos números naturais, o que reforça o cuidado e o rigor matemático na validação da proposição. Para além disso, a argumentação é sustentada por garantias explícitas, que estruturam de forma geral o raciocínio e contribuem para uma melhor organização discursiva e fortalecimento do encadeamento lógico (Balacheff, 1987; 1988).

Três discentes (Vinícius, Maria e Lourdes) não conseguiram produzir uma garantia para viabilizar algum tipo de prova.

Em particular, Vinícius e Maria limitaram-se apenas a responder afirmativamente, concordando com a validade da proposição. Não apresentaram argumentos matemáticos que justificassem sua resposta. Dessa forma, suas manifestações restringiram-se apenas à aceitação da afirmação, sem a construção de uma justificativa que sustentasse a tese apresentada.

Por outro lado, Lourdes manifestou uma discordância equivocada a respeito da proposição como também não apresentou argumentos matemáticos que justificassem sua posição. Essa atitude levanta suspeitas de que a aluna teve dificuldades para compreender o significado de uma tese e o que se esperava dela em relação à atividade. De modo geral, a maioria dos estudantes tiveram dificuldades para produzir provas de caráter probatório e explicativo (Hanna, 2000). Somente dois discentes apresentaram um desempenho satisfatório na medida em que obtiveram sucesso na produção de provas intelectuais (Balacheff, 1987; 1988).

Em outra tarefa de prova foi solicitado aos sujeitos de pesquisa que encontrassem um argumento para validar a seguinte afirmação (tese) “o produto envolvendo um número positivo por um número negativo resulta em um número negativo”. Em outras palavras, a tarefa propunha uma justificação racional que pudesse fundamentar o uso da “regra de sinais” envolvendo o produto entre um número positivo e um número negativo.

Como resultado desta segunda tarefa, verificou-se que nenhum dos discentes investigados conseguiu elaborar um argumento de prova válido que pudesse explicar essa propriedade.

As argumentações apresentadas por Vitor, Winderson e Lourdes partem de dados classificados como empíricos (Rodrigues e Monteiro, 2024) e fazem uso de forma equivocada da própria tese/conclusão (regra de sinais) como uma garantia em nível de empirismo ingênuo (Balacheff, 1987;1988) para justificar a proposição, conforme pode ser visto a seguir nas Figuras 8, 9 e 10:

Figura 8 - Modo de validação proposto por Vitor para a proposição 2

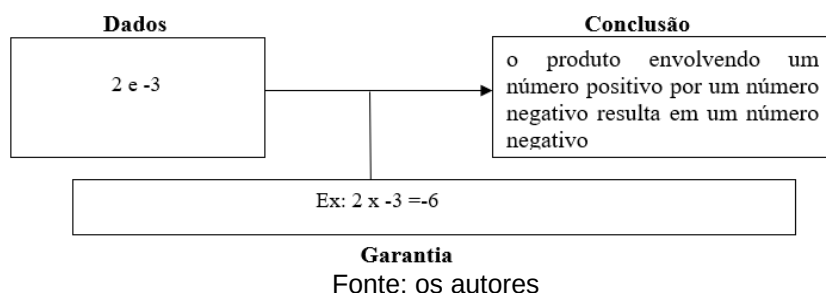


Figura 9 - Modo de validação proposto por Winderson para a proposição 2

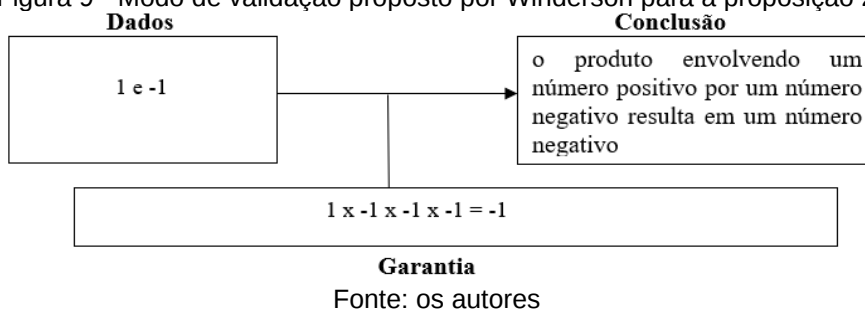
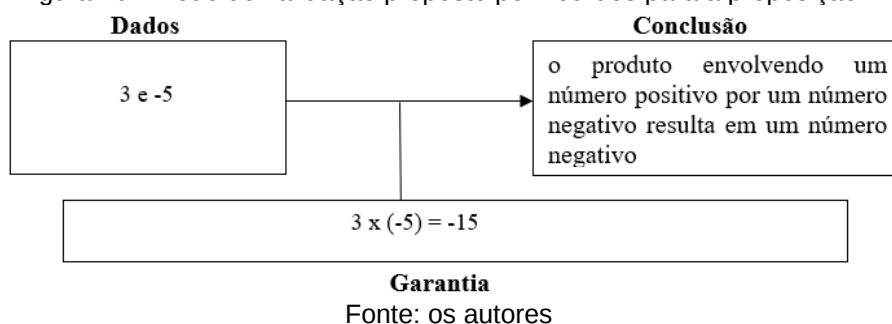
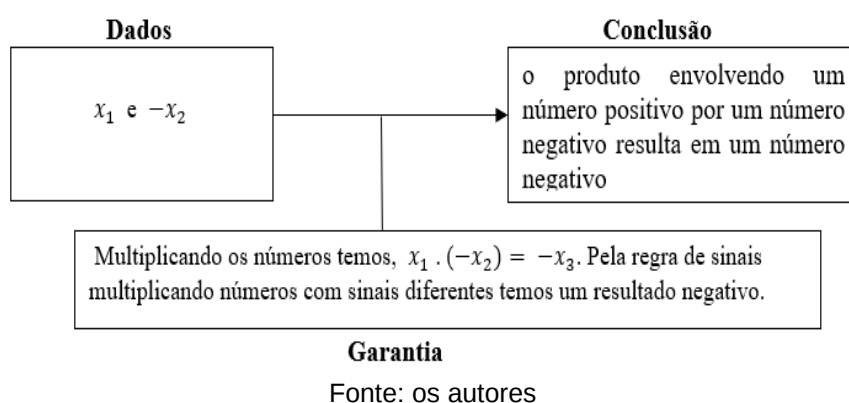


Figura 10 - Modo de validação proposto por Lourdes para a proposição 2



Diferentemente dos resultados anteriores, Gustavo ao menos descreveu de forma genérica e sem rigor os dados (Rodrigues e Monteiro, 2024) que utilizou para caracterizar um número positivo e outro negativo. No entanto, da mesma forma que Vitor, Winderson e Lourdes, fez uso de forma equivocada da tese/conclusão (regra de sinais) como garantia para provar a proposição, conforme indicado a seguir.

Figura 11 - Modo de validação proposto por Gustavo para a proposição 2

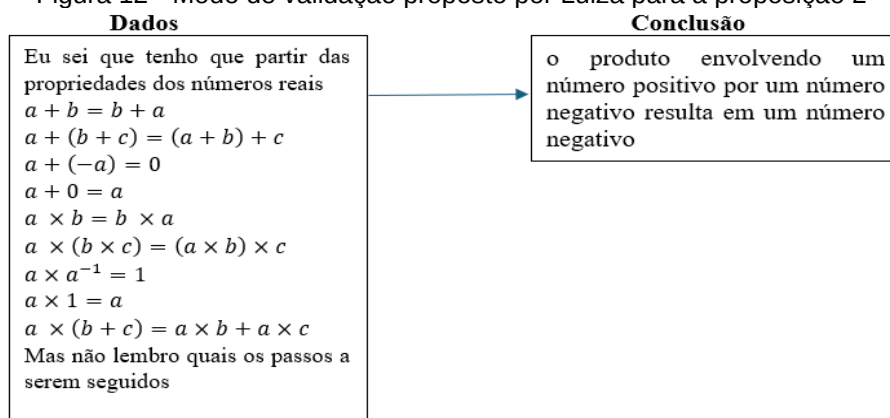


As argumentações apresentadas não foram aceitas como válidas para fins probatórios uma vez que os quatro estudantes utilizaram a tese/conclusão como premissa em sua justificativa (garantia) durante a demonstração. Nota-se, portanto, uma dificuldade em reconhecer, diferenciar e saber utilizar os elementos fundamentais que compõe uma demonstração, hipótese e tese.

Não tão distante do que foi apresentado, Vinícius e Maria, sem explicitar o que consideravam como dados para o problema de prova, utilizaram a regra de sinais como garantia para estabelecer a conclusão/tese. Novamente, se você assume a "regra de sinais" como hipótese na garantia para provar que negativo $\times$ positivo = negativo, você está pressupondo o que deseja demonstrar. Isso é um círculo lógico (petição de princípio). Em resumo, não se deve usar a regra de sinais como hipótese. Ela é justamente o teorema (tese) que você está tentando demonstrar. O caminho certo é usar definições (oposto, zero, distributiva) e daí concluir a regra.

Nessa direção, Luiza é ao menos mais assertiva ao indicar um conjunto de dados genéricos (Rodrigues e Monteiro, 2024) ou hipóteses que podem ser utilizados para provar a proposição, no entanto, ela não oferece uma garantia que possa estabelecer uma ligação entre os dados e a conclusão. Nesse caso o argumento apresentado ficou incompleto, conforme pode ser visto na Figura 12.

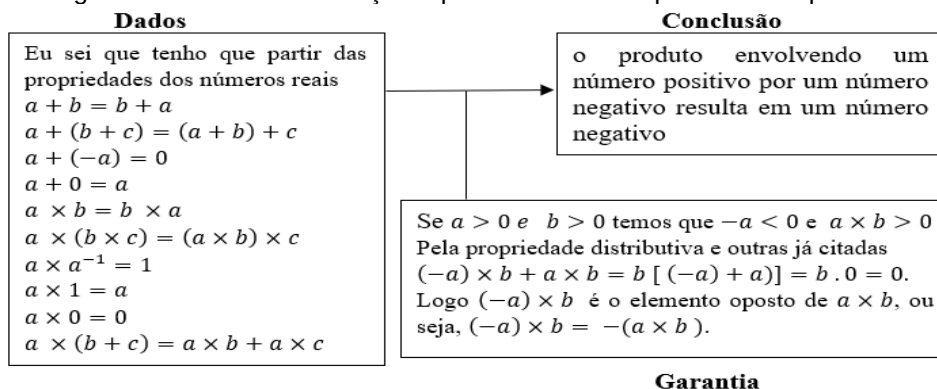
Figura 12 - Modo de validação proposto por Luiza para a proposição 2



Fonte: os autores

Uma possibilidade de justificação a partir dos dados fornecidos por Luiza é apresentado como sugestão na Figura 13.

Figura 13 - Modo de validação a partir dos dados apresentados por Luiza

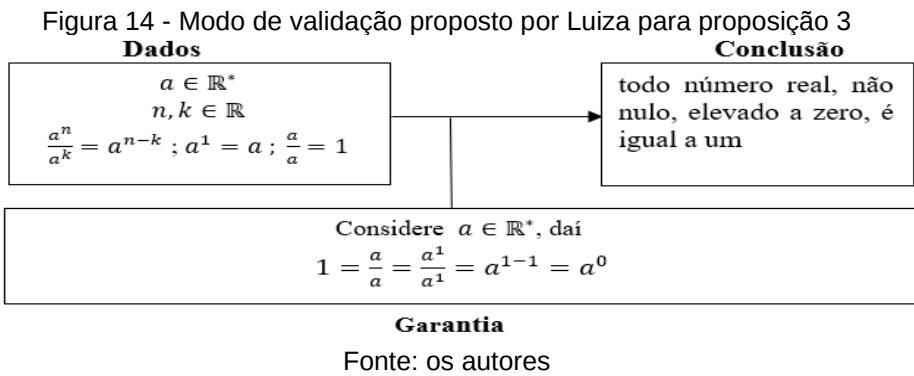


Fonte: os autores

Trata-se, portanto, de uma prova intelectual em um nível de experiência mental formal, racional e genérica, também conhecido, como demonstração matemática (Balacheff, 1987;1988; Hanna, 1990) sendo considerada uma prova sólida, forte e de boa elaboração (Rodrigues e Monteiro; 2024) e também probatória (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari, 2016).

Foi proposto na sequência que os sujeitos investigados produzissem um argumento de prova para justificar a seguinte afirmação (tese) “todo número real, não nulo, elevado a zero, é igual a um”.

Dos sete (7) sujeitos investigados apenas um único discente (Luiza) produziu uma prova intelectual em nível de experiência mental (Balacheff, 2023;2024) conforme apresentado a seguir na Figura 14.



Os dados apresentados por Luiza são classificados como genéricos tomando como referência o modelo apresentado por Rodrigues e Monteiro (2024). Por sua vez a garantia é classificada como uma experiência mental (Rodrigues e Monteiro, 2024) na medida em que revela um raciocínio dedutivo que articula premissas (hipóteses) e produz uma generalização e formalização do pensamento, desprovido de concretizações (Balacheff, 1987;1988). Para além disso, o uso do rigor matemático no emprego da linguagem simbólica e a justificação genérica (Hanna, 2000) utilizada por Luiza corroborou para que a prova elaborada fosse classificada como intelectual no nível mais elevado da hierarquia proposta por Balacheff (1987;1988), ou seja, a demonstração (prova matemática formal). Esta prova, portanto, é considerada forte, sólida, de boa elaboração (Rodrigues e Monteiro, 2024) e também probatória (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari, 2016).

Os outros estdantes, por sua vez, aceitaram a proposição como se fosse um axioma sem a necessidade de realizar uma justificação a nível de prova. Em particular alguns deles expressaram essa ideia dizendo se tratar de uma “regra matemática” (Maria), “propriedade da potência” (Lourdes e Vitor) ou “um postulado da potenciação” (Gustavo). No entendimento

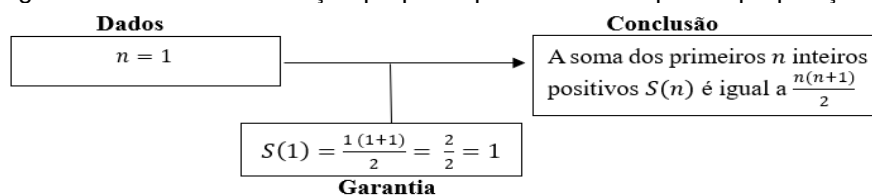
destes discentes, a “regra”, o “postulado” ou “propriedade” em questão conforme mencionado por eles não necessita de uma justificação para ser aceita.

Estes estudantes, portanto, enfrentam dificuldades relacionadas à compreensão epistemológica da prova: não distinguem entre proposições que precisam ser demonstradas e axiomas que são assumidos; naturalizam regras como verdades absolutas; e não reconhecem a prova como prática central da Matemática. Isso evidencia a necessidade de trabalhar, na formação inicial, o papel da prova como instrumento de validação, generalização e construção de conhecimento matemático conforme preconiza Rodrigues (2023).

Por fim, os discentes foram convidados a apresentar uma justificativa para validar a proposição: “A soma dos primeiros n inteiros positivos $S(n)$ é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ ”.

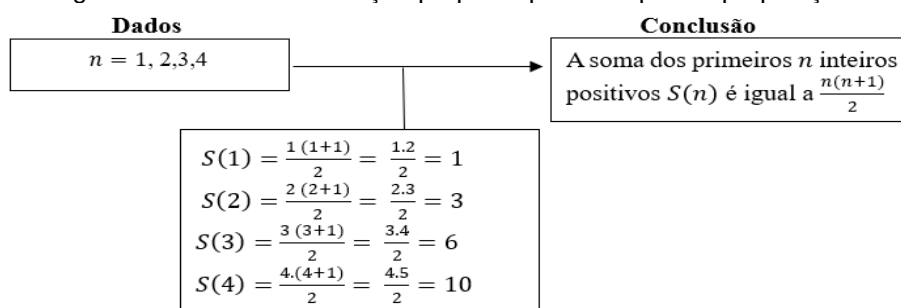
Para Vitor e Winderson a proposição pode ser provada por meio da verificação de simples testes empíricos (Balacheff, 1987;1988) conforme indicado nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 - Modo de validação proposto por Winderson para a proposição 4



Fonte: os autores

Figura 16 - Modo de validação proposto por Vitor para a proposição 4



Fonte: os autores

Tanto Vitor quanto Winderson partiram de dados classificados como empíricos e por meio de uma justificativa baseada em um empirismo ingênuo (Rodrigues e Monteiro, 2023;2024) produziram um tipo de prova pragmática no nível mais elementar da hierarquia proposta por Balacheff (1987;1988). O nível de prova destes discentes, “empirismo ingênuo” se explica pelo fato de que a garantia apresentada por eles se baseia apenas em casos particulares que validam a proposição apenas para as situações testadas, impossibilitando assim uma generalização (Hanna, 2000). A prova apresentada, por eles, não é probatória

(Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafyllou, Spiliotopoulou e Potari, 2016) é classificada como pragmática (Balacheff, 1987; 1988) e considerada fraca e de pouca elaboração (Rodrigues e Monteiro, 2024).

Quando os estudantes demonstram uma proposição apenas por meio de testes empíricos, a principal dificuldade é não compreender que a prova matemática exige generalidade e rigor lógico. Essa postura evidencia uma visão limitada da prova, reduzida à verificação de casos, e aponta para a necessidade de trabalhar, na formação inicial, a distinção entre verificação empírica e demonstração dedutiva (Rodrigues, 2023).

Três discentes, Vinícius, Maria e Lourdes concordaram que a proposição é válida, contudo, não apresentaram nenhum argumento de justificação e validação. Por este motivo não foi possível avaliar a qualidade e solidez da prova.

Já Gustavo e Luiza utilizaram o método de indução matemática para validar a proposição, conforme indicado nas Figuras 17 e 18.

Figura 17 - Modo de validação proposto por Gustavo para a proposição 4

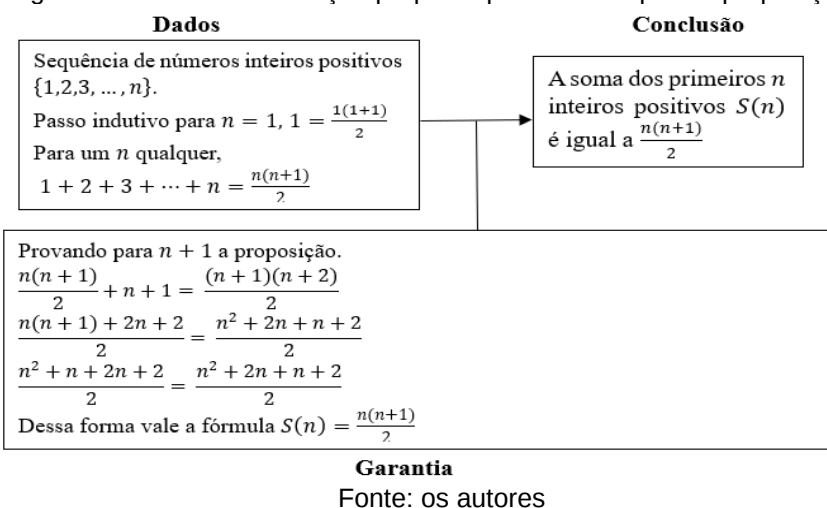
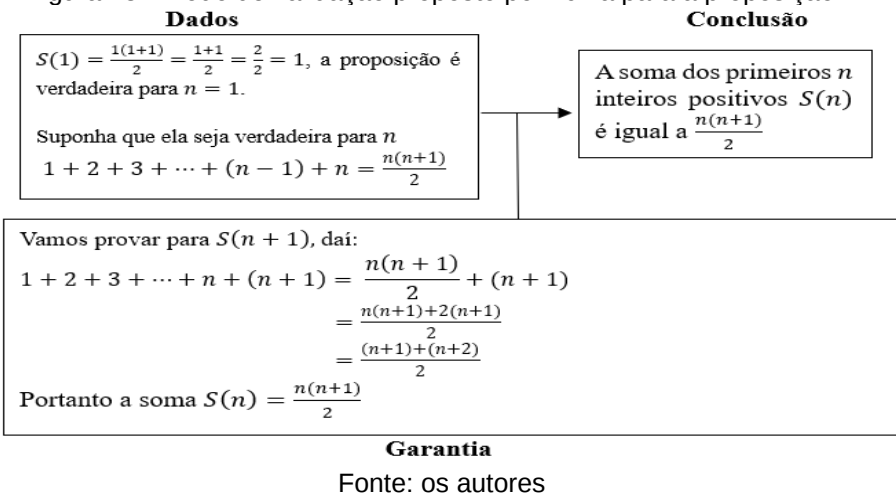


Figura 18 - Modo de validação proposto por Luiza para a proposição 4



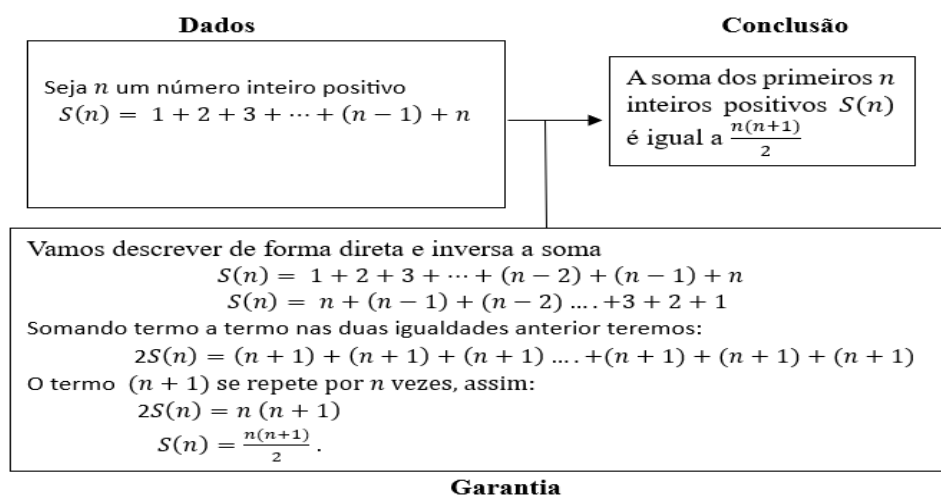
Tanto Gustavo quanto Luiza utilizaram o método da indução matemática para validar a proposição. Este método formal, inerente ao campo da matemática, permite obter uma prova intelectual em um nível de experiência mental também conhecido como demonstração matemática ou prova matemática formal (Balacheff, 1987;1988).

Com relação ao caráter probatório das duas provas intelectuais apresentadas, verificou-se um erro lógico na prova produzida por Gustavo. Na garantia apresentada o estudante desenvolveu os dois lados da igualdade simultaneamente, ou seja, desenvolveu algebricamente tanto a hipótese quanto a tese afim de verificar uma possível igualdade. O erro, portanto, consiste na manipulação da tese considerando-a verdadeira de forma precipitada antes da demonstração efetivamente encerrar. Diferentemente de Gustavo, Luiza desenvolveu a soma e utilizou a hipótese de indução até chegar à tese da indução. Dito isso, consideramos somente a prova produzida por Luiza como prova válida e probatória (Hanna, 2000; Rodrigues, 2023; Triantafyllou, Spiliotopoulou e Potari, 2016).

Para Rodrigues e Monteiro (2024) a prova por indução, é considerada uma prova sólida, forte e de boa elaboração. No entanto, Hanna (2000) destaca que este tipo de prova tem um poder probatório, mas deixa a desejar no quesito explicação. Para esta autora a boa prova é aquela que prova e que também explica.

Uma possibilidade de prova com estas características preconizadas por Hanna (2000) é a prova que sugerimos a seguir na Figura 19.

Figura 19 - Modo de validação apresentado como sugestão para a proposição 4



Fonte: os autores

A prova apresentada caracteriza-se como intelectual, pois valida a proposição por meio de generalização e articulação racional de conceitos. Situa-se no nível de experiência mental, sendo menos rigorosa que a prova por indução. Ainda assim, apresenta uma

vantagem destacada por Hanna (2000): além de validar, também explica, assumindo assim um importante caráter pedagógico que deve ser valorizado pelo professor em sala de aula (Hanna, 2000). O Quadro 2 sintetiza o desempenho de cada estudante.

Quadro 2 - Avaliação do argumento de prova elaborado para cada discente.

Discente	Proposição	Avaliação
Vitor	Proposição 1	Prova Pragmática em nível de empirismo ingênuo e caráter não probatório. Argumento fraco e de pouca elaboração.
	Proposição 2	Argumento de prova inválido
	Proposição 3	-
	Proposição 4	Prova Pragmática em nível de empirismo ingênuo e caráter não probatório. Argumento fraco e de pouca elaboração
Lourdes	Proposição 1	-
	Proposição 2	Argumento de prova inválido
	Proposição 3	-
	Proposição 4	-
Gustavo	Proposição 1	Prova Intelectual em nível de experiência mental não formal e caráter probatório. Argumento forte de boa elaboração.
	Proposição 2	Argumento de prova inválido
	Proposição 3	-
	Proposição 4	-
Luiza	Proposição 1	Prova Intelectual em nível de experiência mental formal e caráter probatório. Argumento forte e de boa elaboração.
	Proposição 2	-
	Proposição 3	Prova Intelectual em nível de experiência mental formal e caráter probatório. Argumento forte e de boa elaboração.
	Proposição 4	Prova Intelectual em nível de experiência mental formal e caráter probatório. Argumento forte e de boa elaboração.
Winderson	Proposição 1	Prova Pragmática em nível de experimento crucial e caráter não probatório. Argumento fraco e de pouca elaboração.
	Proposição 2	Argumento de prova inválido
	Proposição 3	-
	Proposição 4	Prova Pragmática em nível de empirismo ingênuo e caráter não probatório. Argumento fraco e de pouca elaboração.
Maria	Proposição 1	-
	Proposição 2	Argumento de prova inválido
	Proposição 3	-
	Proposição 4	-
Vinícius	Proposição 1	-
	Proposição 2	Argumento de prova inválido
	Proposição 3	-
	Proposição 4	-

Fonte: os autores

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo investigar os tipos e níveis de prova mobilizados por estudantes concluintes do curso de Licenciatura em Matemática na validação de proposições numéricas, e também analisar as dificuldades apresentadas na elaboração de argumentos de caráter probatório. A análise foi realizada a partir da articulação entre o modelo argumentativo de Toulmin (2001), os tipos e níveis de provas segundo Balacheff (1987, 1988) e o modelo teórico-metodológico proposto por Rodrigues e Monteiro (2024), sendo possível examinar simultaneamente a estrutura dos argumentos, o nível de validação alcançado e o tipo de prova mobilizado.

Os resultados indicaram predominância de provas pragmáticas, especialmente em nível de empirismo ingênuo e houve também a presença de experimento crucial. Verificou-se uso recorrente de exemplos particulares como forma de validação sem garantia de generalização e ocorrência de argumentos inválidos, e muitas vezes a conclusão foi utilizada como premissa na justificativa. Houve poucos registros de provas intelectuais em nível de experiência mental formal. Esses dados apontam dificuldades relacionadas à generalização, à explicitação das garantias e à organização lógica dos argumentos.

A recorrência da prova pragmática pode estar associada a diferentes fatores. Entre as hipóteses possíveis estão os efeitos do período da pandemia na formação acadêmica, o perfil específico da turma investigada, a participação irregular de estudantes ao longo do curso e a organização curricular das disciplinas, com eventual ênfase na resolução de exercícios ao invés da problematização da prova como objeto de estudo. Essas hipóteses não foram investigadas diretamente, mas os resultados permitem levantar tais possibilidades.

A principal contribuição deste estudo consiste na aplicação do modelo teórico-metodológico de Rodrigues e Monteiro (2024) em um contexto de produção individual e monológica, ampliando seu uso para além de situações de argumentação coletiva. O trabalho demonstra que o modelo permite identificar tipos e níveis de prova, classificar argumentos quanto ao caráter probatório e analisar a consistência das garantias apresentadas. Dessa forma, o estudo oferece dados que podem embasar discussões sobre o ensino da prova na formação inicial.

Como limitações, destacam-se o número reduzido de participantes, o recorte em uma única instituição e a análise restrita a quatro proposições numéricas específicas. A coleta de dados ocorreu por meio de uma atividade individual escrita, o que não possibilitou observar processos argumentativos por interação. Além disso, o estudo não investigou variáveis

institucionais, curriculares ou históricas que poderiam contribuir para explicar os resultados encontrados.

Para investigações futuras, sugere-se ampliar o número de participantes e instituições, comparar produções individuais e coletivas, analisar intervenções didáticas voltadas ao ensino da prova e investigar a relação entre organização curricular e desenvolvimento da argumentação matemática. Também se mostra pertinente examinar possíveis impactos de contextos formativos específicos, como o período pandêmico, na consolidação do pensamento demonstrativo.

REFERÊNCIAS

- BALACHEFF, Nicolas. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147–176. DOI: 10.1007/BF00314724. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00314724>. Acesso em: 02 fev. 2026. 1987.
- BALACHEFF, Nicolas. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, David (org.). **Mathematics, teachers, and children: a reader**. London: Hodder & Stoughton, p. 215–235. 1988.
- BICUDO, I. **Demonstração em Matemática**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, v. 15, n. 18, p. 79–90, 2002.
- DOMINGUES, H. H. **A Demonstração ao Longo dos Séculos**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002.
- ERDURAN, Sibel; SIMON, Shirley; OSBORNE, Jonathan. TAPping into argumentation: developments in the application of Toulmin's Argument Pattern for studying science discourse. **Science Education**, v. 88, n. 6, p. 915–933, 2004. DOI: 10.1002/sce.20012.
- GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. Demonstrations in Mathematics Education: an essay. **Bolema - Bulletin of Mathematics Education**, v.15, n. 18, p.91-99, 2002.
- HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6–13. DOI: 10.1007/BF01809605. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01809605>. Acesso em: 02 fev. 2026. 1990.
- HANNA, Gila. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, n. 1–3, p. 5–23. DOI: 10.1023/A:1012737223465. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1012737223465>. Acesso em: 02 fev. 2026. 2000.
- HANNA, Gila; DE VILLIERS, Michael. ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 2, p. 329–336, 2008.
- RODRIGUES, Fredy Coelho; DOS SANTOS, Milton Soares; JALHIUM, Niomar Bolano; MONTEIRO, Marco Aurélio Alvarenga. A argumentação em uma atividade de investigação na formação de professores de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 21, p. 293–312. DOI: 10.33871/22385800.2021.10.21.293-312.

Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6263>. Acesso em: 01 fev. 2026. 2021.

RODRIGUES, Fredy Coelho; MONTEIRO, Marco Aurélio Alvarenga. **Argumentações e provas na formação de professores em matemática**. São Paulo: Editora Dialética. 2025.

RODRIGUES, Fredy Coelho; MONTEIRO, Marco Aurélio Alvarenga. Modelo para avaliação do argumento de prova em um contexto de ensino baseado em modelagem. **Revista de Enseñanza de la Física (Online)**, v. 33, p. 143–151. Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br>. Acesso em: 02 fev. 2026. 2021.

RODRIGUES, Fredy Coelho; MONTEIRO, Marco Aurélio Alvarenga. Um modelo para avaliação do argumento de prova em contextos de ensino baseado em argumentação coletiva. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1–20. DOI: 10.37001/riperm.v14i1.3859. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/riperm/article/view/3859>. Acesso em: 02 fev. 2026. 2024.

RODRIGUES, Fredy Coelho. **Da argumentação à prova: produção e avaliação de argumentos matemáticos elaborados por estudantes ingressantes em um curso de formação de professores**. Tese de Doutorado em Educação em Ciências – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2023.

TOULMIN, Stephen. **Os usos do argumento**. Tradução de Reinaldo Guarany. São Paulo: Martins Fontes. 2001.

TRANTAFILLOU, C.; SPILIOTOPOULOU, V.; POTARI, D. **The Nature of Argumentation in School Mathematics and Physics Texts: The Case of Periodicity**. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v. 14, n. 4, p. 681–699, 1 maio 2016.